Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Locală - Maramureş

Clasa a X-a, **Varianta a II-a**

3 p **1. a)** Dacă $a, b, c \in [0, \infty)$, să se arate că $a+b+c \geq \frac{a^2+b^2+c^2+3}{2} \Leftrightarrow a=b=c=1$.

4 p **b)** Să se rezolve ecuația următoare, în mulțimea numerelor reale:

$$\sqrt{2^x-1}+\sqrt{3^x-2^x}+\sqrt{2^{x+1}-3^x}=2^x+1.$$

Ludovic Longaver

7 p **2.** Să se rezolve ecuația $8x^3-4x=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}, \quad x \in [0, \infty)$.

7 p **3.** Arătați că dacă $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ este de modul 1, atunci numărul $\frac{z}{1+z^2}$ este real.

Care numere reale sunt de această formă?

S.L14.295, G.M. 11 / 2014

7 p **4.** Fie triunghiul ABC și punctele D, E, M, N astfel încât M e mijlocul lui (BC), N e mijlocul lui (AC), $(DM) \cap (AB) \neq \varnothing$, $(EN) \cap (BC) \neq \varnothing$, $AD = AB$, $BE = BC$ și $DAB \equiv EBC$.

Să se demonstreze că $\triangle ADM \sim \triangle BEN$ dacă și numai dacă $\triangle ABC$ este echilateral.

Dana Heuberger

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Subiecte selectate și prelucrate de:
Cristian Heuberger, C.N. „Gheorghe Șincai” Baia Mare
Ludovic Longaver, L.T. „Németh Làszló” Baia Mare
Costel Cioclu, L.T. „Emil Racoviță” Baia Mare